

Α' Μέρος, Τεστ 5 Μιγαδικές Συναρτήσεις Ι

Διάρκεια 60 Λεπτά

Στοιχειοθεσία: Δήμογλου Κωνσταντίνος, Μαθηματικός (Msc)

Θέμα 1

Έστω η μιγαδική συνάρτηση $f(z) = \frac{1}{z-i}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$. Για κάποιο $r > 0$ (το οποίο και θα προσδιορίσετε) αναπτύξτε την f στο δίσκο $D(2, r)$ σε δυναμοσειρά κέντρου 2. Να κάνετε το ίδιο για τη συνάρτηση f^2 .

Θέμα 2 (Σωστό ή Λάθος;)

(i) Έστω $z, w \in \mathbb{C}$ τέτοια ώστε $|z+i| \leq 3$ και $|w+i| > 4$. Τότε, ισχύει

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z+i}{w+i} \right)^n = \frac{w+i}{w-z}.$$

(ii) Το ανάπτυγμα της e^z στο σημείο πi είναι $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} (z - \pi i)^n$.

(iii) Το ανάπτυγμα της $\cos z$ στο 2π είναι $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(z - 2\pi)^{2n}}{(2n)!}$.

(iv) Το όριο της ακολουθίας $z_n = \sin(in)$, $n \in \mathbb{N}$ είναι το 0.

(v) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{n^2}$ συγκλίνει απόλυτα.

(vi) Η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=0}^{\infty} (\cos(in))z^n$ είναι ίση με e .

Θέμα 3

(i) Να αποδείξετε ότι για κάθε $z, w \in \mathbb{C}$, ισχύει:

$$\cos(z+w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w.$$

(ii) Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{z \rightarrow \pi/4} \frac{\cos(2z)}{\cosh(iz) + i \sinh(iz)}$$

(iii) Να αποδείξετε ότι για κάθε $z \in \mathbb{C}$, ισχύει:

$$\cos^2 z = \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^{2n-1} \frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$

ΚΑΛΗ ΤΥΧΗ!!